Soluții – clasa a XII-a

1. Fie f(x)= $\left|\frac{1}{2}+cosx\right|$, x$\in(0,2\pi)$

Avem

$$\begin{cases}\frac{1}{2}+\cos x & ,0<x<\frac{2\pi}{3}\\ -\frac{1}{2}-cosx & ,\frac{2\pi}{3}\leq x\leq\frac{4\pi}{3}\\ \frac{1}{2}+cosx & ,\frac{4\pi}{3}<x\leq 2\pi\end{cases}$$

Fie F(x): $(0,2\pi)\rightarrow\boldsymbol{R}$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+sinx+C_1 & 0<x<\frac{2\pi}{3}\\ -\frac{1}{2}x-sinx+C_2 & \frac{2\pi}{3}\leq x\leq\frac{4\pi}{3}\\ \frac{1}{2}x+xsinx+C_3 & \frac{4\pi}{3}<x<2\pi\end{cases}$$

Continuitatea in x=$\frac{2\pi}{3}$ si x=$\frac{4\pi}{3}$ pentru F(x) impune ca C_2=$\frac{2\pi}{3}$+$\sqrt{3}$+C_1 si C_3=$-\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}+C_2$

de unde

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+sinx+C\\ -\frac{1}{2}x-\sin x+\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}+C\\ \frac{1}{2}x+sinx\frac{-2\pi}{3}+2\sqrt{3+C}\end{cases}$$ cu C$\in\boldsymbol{R}$

Verificarea derivabilitatii in x=$\frac{2\pi}{3}$ si x=$\frac{4\pi}{3}$

2. Sa presupunem, prin reducere la absurd, ca exista $l\in\boldsymbol{R}$ astfel incat

$$\lim_{x\to\infty}(F\circ F)(x)=l.$$

Inegalitatea din ipoteza se rescrie sub forma

$$(\ln(F\circ F)(x)-\ln x)'\geq 0,$$

pentru orice x$\in(0,\infty)$, ceea ce arata ca functia h: $(0,\infty)\to\mathbf{R}$,data de

$$h(x)=\ln(F\circ F)(x)-\ln x,$$

pentru orice x$\in(0,\infty)$,este crescatoare.

Prin urmare functia g: $(0,\infty)\rightarrow\boldsymbol{R}$,data de

$$g(x)=\frac{(F\circ F)(x)}{x},$$

pe orice x$\in(0,\infty)$, este crescatoare.

Atunci, pesntru orice x$\in$[1∞), avem

$$(F\circ F)(x)\geq F(F(1))x$$

De unde, folosinf ipoteza,

$$F(F(x))f(x)\geq F(F(1)),$$

deci

$$\lim_{x\to\infty}f(F(x))f(x)\geq F(F(1))>0.$$

Folosind regula lui l'Hospital, obtinem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(F\circ F)(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} f\big(F(x)\big)f(x)\geq F\big(F(1)\big)>0.$$

Pe de alta parte insa,avand in vedere presupunerea facuta,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(F\circ F)(x)}{x}=0.$$

Contradictie care incheie demonstratia.

3.

(1) Avem a=aba=ab·aba=a· $ab^2\cdot a=aca$

Cum pentru orice x∈M avem (ab)x=bxa=bxaba=abxba=aba·xb=a·xb=xab rezulta ca $cx=ab^2x=ab\cdot bx=bx\cdot ab=baxb=ab\cdot xb=x\cdot ab^2=xc$

(2) Fie $B=\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y}\\ \hat{z} & u\end{pmatrix}$.Avem $ABA=A^2B=\hat{4}I_2B=\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{x} & \hat{4} & \hat{y}\\ \hat{4} & \hat{z} & \hat{4} & \hat{u}\end{pmatrix}$, de unde $\hat{4}\hat{x}=\hat{4}$, $\ddot{4}\hat{y}=\ddot{0}$, $\hat{4}\hat{z}=\hat{0}$ si $\hat{u}\hat{w}=\hat{4}$

Dar $\hat{4}\hat{x}=\hat{u}$ pentru $\hat{x}\in\{\ddot{1},\ddot{4},\hat{7},\widehat{10}\}$

$\ddot{4}\hat{y}=\hat{0}$ pentru $\hat{y}\in\{\ddot{0},\ddot{3},\ddot{6},\bar{9}\}$

Analog rezulta ca $\hat{z}\in\{\ddot{0},\ddot{3},\ddot{6},\ddot{9}\}$ si $\hat{w}\in\{\ddot{1},\ddot{4},\ddot{7},\overline{10}\}$.

Asadar avem 4x4x4x4=256 matrice B∈ $M_2(Z_{12})$ a.i. A=ABA.

4.

(1) Dacă x∈G, atunci a, ax, a^2x sunt elemente distincte ale lui G şi fie $M_x=\{x,ax,a^2x\}$. Avem $M_x=M_{ax}=M_a2_x$. Dacă y∈G şi $y\notin M_y=\{y,ay,a^2y\}$ atunci $M_x\cap M_y=\emptyset$.

Fie $x_1,x_2,\ldots,x_m\in A$ cu un maxim posibil astfel încât $x_j\notin M_{xi}$, ∀ i≠j. Avem $A=Mx_1\cup Mx_2\cup\ldots\cup Mx_m$ de unde n=3m. Întradevăr, în caz contrar există $x_{m+1}\in A$ astfel încât $x_{m+1}\notin\bigcup_{i=1}^{m}M_{xi}$ ceea ce contrazice maximalitatea lui m.

(2) Fie $z=\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}$ şi $x_1,x_2,\ldots,x_m\in C^*$ astfel încât $|x_s|\neq|x_t|$, ∀ s≠t. Dacă $A=\{z^ix_y\,|\,0\leq 3,\leq j\leq m\}$ atunci A are n=3m numere distinct şi zx∈A, ∀ x∈A.